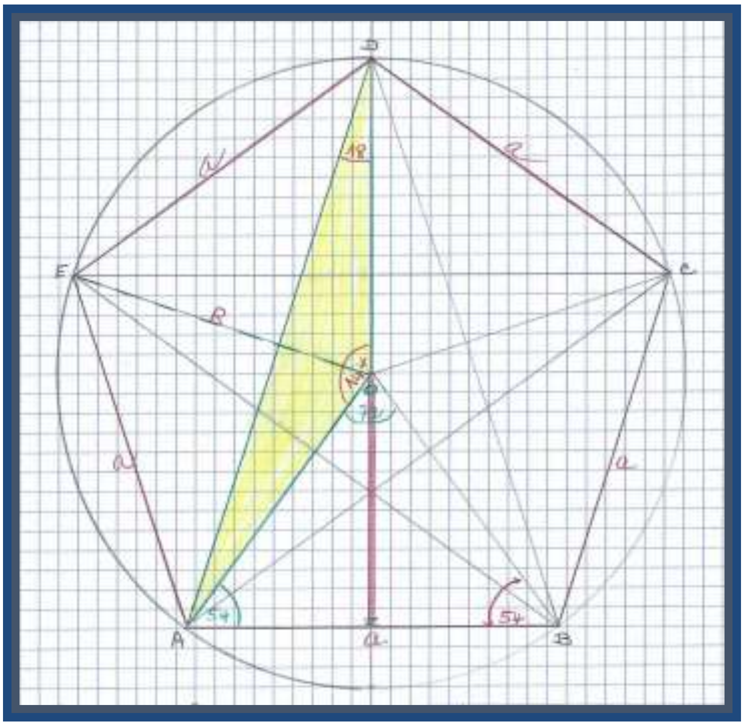
ITER_01_24

Carte d'identité du dodécaèdre : géométrie et gnomonique

****

Le dodécaèdre régulier, ou platonicien, est un solide formé par 12 faces qui sont des pentagones réguliers (5 côtés égaux et 5 angles égaux). Nous nous occuperons donc, d'abord, du pentagone. En même temps que des rappels théoriques, nous indiquerons les vérifications effectuées sur un dodécaèdre Rubik's, qui se trouve chez tous les marchands de jouets et qui nous a permis de lever certaines apories. Nous donnons les résultats avec beaucoup de décimales, mais sur le dodécaèdre-jouet, on doit se contenter du millimètre.



1°) le côté du pentagone convexe est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés sont le côté de l'hexagone convexe et le coté du décagone convexe.

2°) si l'on connaît le rayon, ce côté s'obtient par : p = R/2 * SQR (10 - 2*SQR (5))

Rubik's : côté 31 mm. Rayon : 26.37 mm

3°) la longueur « oz » s'obtient par : R * cos (36°) = 21.333

Rubik's : 21 mm par défaut

4°) la longueur « dz » est : R + oz = 47.703778

Rubik's : 47/48 mm

5°) la somme des angles au centre est : 5 *72 = 360°

6°) chacun des 5 angles aux sommets vaut : 2 * 54° = 108°

7°) la somme des angles aux sommets vaut : 5 * 108° = 540°

On voit déjà que chaque apex du dodécaèdre sera formé de trois angles dont la somme vaudra : 3 * 108° = 324°, proche de la limite des 360° où il n'existe plus de pointe, mais seulement un plan.

8°) si, au contraire, on impose, non plus le rayon, mais le côté « p » du pentagone, on trouvera le rayon par : R = 2 * (p /SQR (10 – (2 * sqr (5)))

Rubik's : côté 31 mm. Rayon : 26.37 mm

9°) la longueur « DA» s'obtiendra par la séquence suivante :

l'angle en « O » vaut : 180 – (2 * 18) = 144°

l' angle en « D » ou « A » vaut 18°

Alors DA = R * cos (18°)*2 = 50.15872

Rubik's : 50 mm par défaut

Ayant ainsi analysé quelques données du pentagone, nous pouvons passer au dodécaèdre.

1°) la hauteur du dodécaèdre est la droite qui joint le centre de deux faces opposées, en passant par le centre du volume. Cette hauteur est égale au diamètre de la sphère inscrite dont il sera parlé plus loin.

Alors h = 69.04 mm

La mesure Rubik's donne environ 69 mm

2°) on définit 3 sphères, externe ou internes au dodécaèdre et qui s'adaptent à lui :

21°) la sphère circonscrite passe par tous les sommets du volume

Son rayon vaut : R = p/4 * SQR (3) * (1 + SQR (5)), avec « p » = arête du dodécaèdre

Appliquée au Rubik's, son rayon = 43.44 mm et son diamètre = 86.88 m

22°) la sphère intermédiaire tangente toutes les arêtes, au milieu de chacune d'elles

Son rayon vaut : Re = p/4 * (3 + SQR (5))

Sur le Rubik's son rayon = 40.58 mm et son diamètre = 81.16 mm

23°) la sphère inscrite, ou interne, tangente chaque face, au centre de chacune d'elles

Son rayon vaut : Ri = p/2*SQR((Φ^5)/SQR(5))

Sur le Rubik's son rayon = 34.52 mm et son diamètre = 69.04 mm

Cette dernière valeur est égale à la hauteur du volume.

3°) l'angle dièdre entre deux faces vaut : 116°,56505 ou ACOS (-1/5 * SQR (5))

ou ARCOTG (-1/2) qu'il faudrait reformuler en :

90° + ATN (0.5) = 116°56505

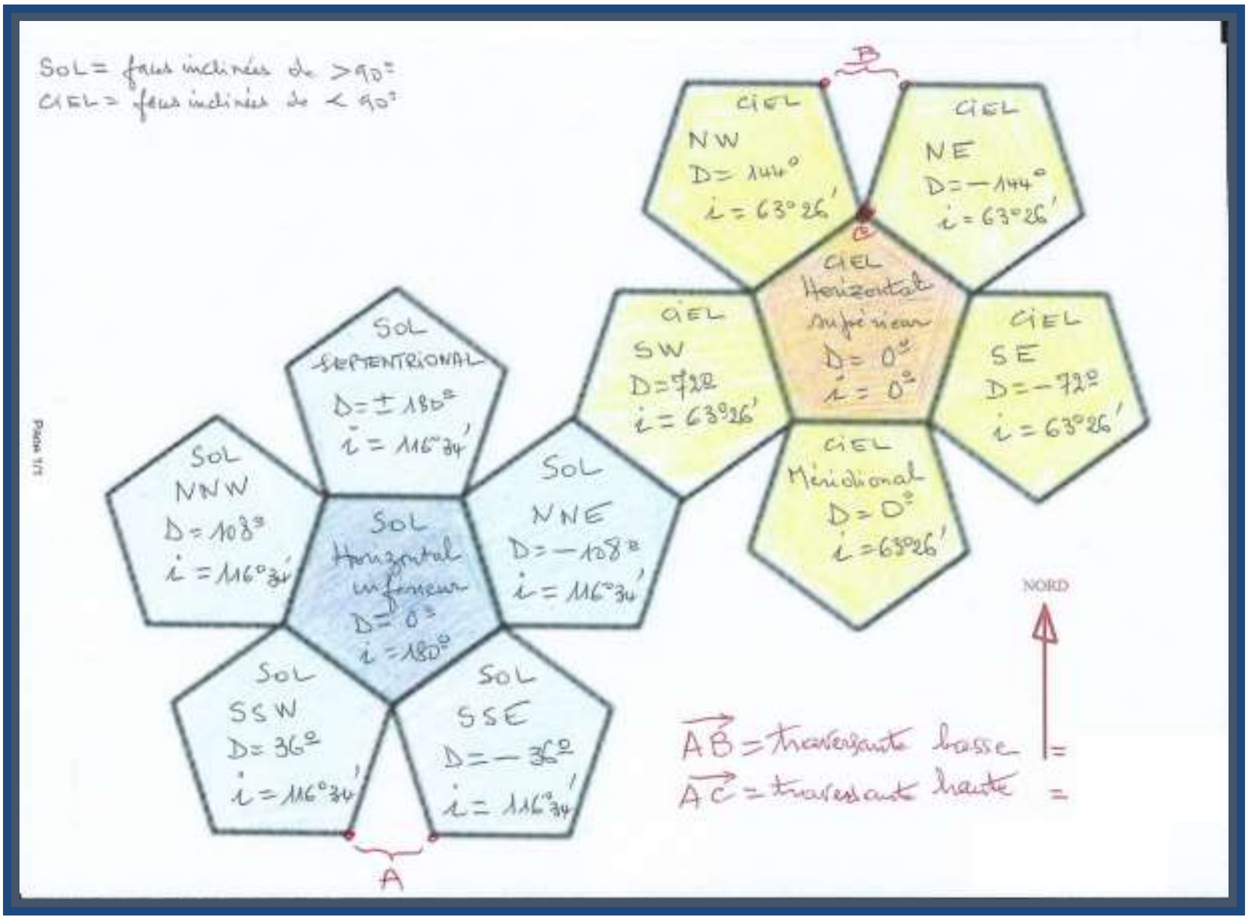
4°) l'angle entre deux arêtes vaut : 121°,72 ou ACOS (- SQR ((5-SQR (5))) / 10)

5°) angle de pente des faces vers le ciel (pour établir l'inclinaison gnomonique) :

C’est ATN (2) = 63°435

6°) angle de pente des faces vers le sol (même utilité) :
C’est 180 – 63°,435 = 116°565

7°) déclinaison gnomonique des faces inclinées, si l’on décide, arbitrairement, de placer le dodécaèdre de façon que sa face horizontale supérieure ait un sommet au Nord :
+ et – 72° et + et – 144° (faces inclinées vers le ciel)
+ et – 36° et + et – 108° (faces inclinées vers le sol)
Toutes ces considérations aboutissent à faire dresser la figure ci-dessous.



Gnomonique du dodécaèdre : les traversantes (*)

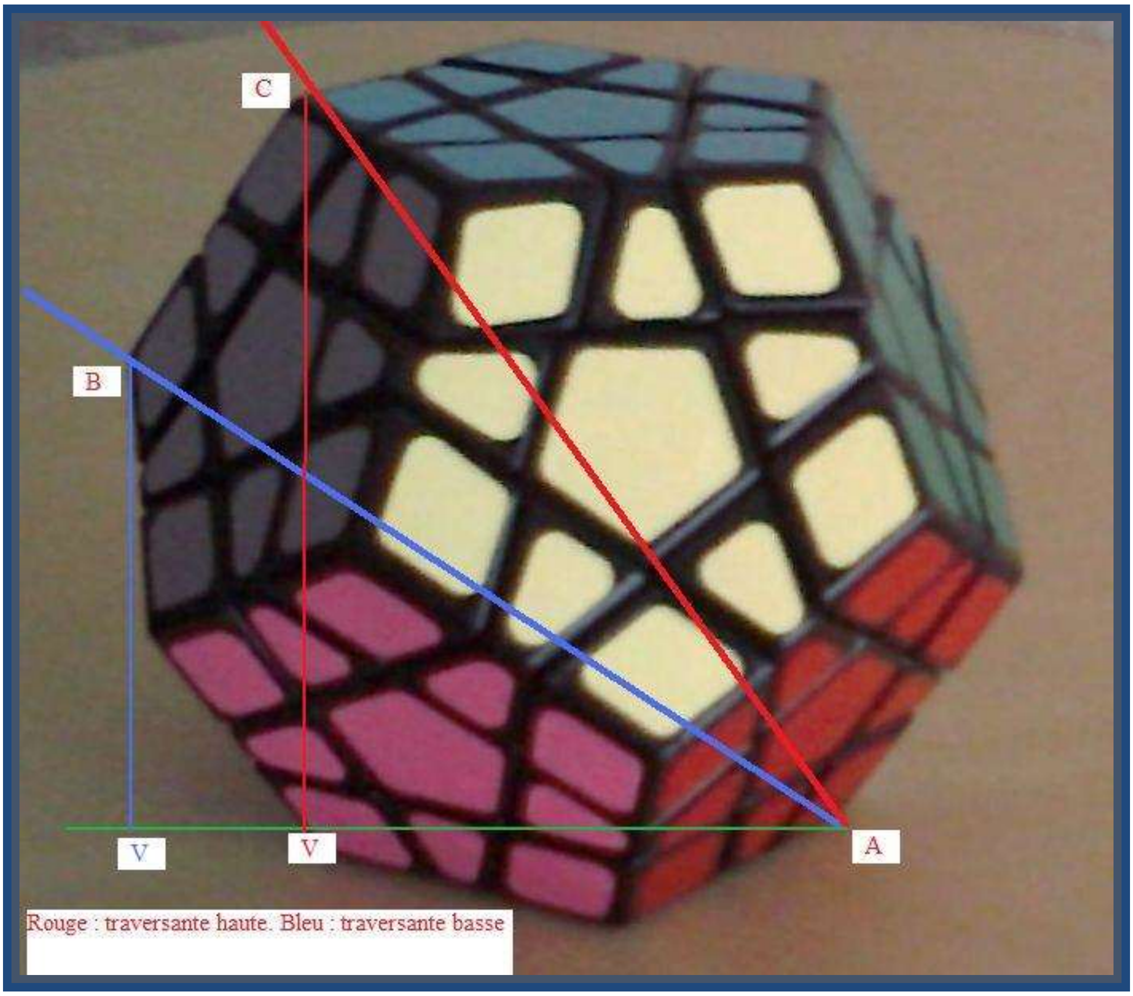
****

1°) on appelle « traversante haute » la droite qui part du point « A » (au sol, au Sud) et aboutit au point « C », à la pointe du dodécaèdre commune aux faces NE, NW, horizontale.
2°) on appelle « traversante basse » la droite qui part du même point « A » et aboutit au point « B », sommet commun des faces NE, NW, septentrionale
3°) connaître l'angle de ces droites avec le sol, procure les deux latitudes où elles seraient confondues avec l'axe du monde en ces lieux, ce qui permettrait de poser le dodécaèdre sur un cadran horizontal dont elles formeraient, convenablement prolongées, le style polaire. Chacune est l'hypoténuse d'un triangle rectangle CVA pour la traversante haute et BVA pour la traversante basse, avec :
CV et BV = hauteur depuis le sol, du point de sortie, au Nord. Pour CV c'est la hauteur du dodécaèdre ; pour BV, c'est à calculer.
VA = longueur, au sol, depuis le point A jusqu'à V qui est le point atteint par une verticale abaissée depuis C ou B.

Au seuil de l'analyse, on peut connaître soit le rayon du cercle circonscrit soit le côté du pentagone, « a ». Nous redisons que, pour pouvoir vérifier sur un objet réel, les résultats obtenus, nous avons choisi un dodécaèdre Rubik's, de modèle ordinaire. C'est l'arête « a » qui pouvait se mesurer sans ambiguïté. Elle mesure 31 millimètres. Par la suite, tous les résultats donnés ici sont conformes aux mesures du Rubik's.

Nous obtenons le rayon du cercle circonscrivant le pentagone par :
R = 2 * (a / (sqr (10) – (2 * sqr (5)))) = 26.37 mm
Nous obtenons la longueur de la droite « oz » du dessin par :
oz = 26.37 * cos (36°) = 21.33 mm
Puis nous passons au dodécaèdre ;
Sa hauteur est la droite qui joint le centre de deux faces opposées :
h = 69.04 mm, soit le diamètre de la sphère inscrite. Voir supra interprétations.
Le rayon de la sphère qui circonscrit le dodécagone s'obtient par :
R = a/4 * sqr (3) * (1 + sqr (5)) ou :
R = 31/4 * 5.605 = 43.43875 mm
Le diamètre = 2 * R = 86.8775, comme déjà vu supra.

(*) On pourrait aussi appeler cette droite, une traverse ou une traversière, mais la « traboule » lyonnaise nous paraît un peu familière.



Nous pouvons alors calculer l'angle avec le sol de la traversante haute, donc savoir à quelle latitude elle serait confondue avec l'axe du monde. Savoir cela permet de poser le dodécaèdre, non plus sur une surface horizontale quelconque, mais sur un cadran horizontal dont la traversante prolongée devient le style. Considérons le triangle rectangle CVA, rectangle en V, où :

CV = h = 69.04

CA = hypoténuse = 86.8775 = traversante

Le côté VA = SQR (CA^2 - CV^2) = 52.73688

Alors 69.04 / 52.73688 = 1.3091408 dont l'ATN = 52°,625 qui est la latitude cherchée.

Qu'en est-il, maintenant, de la traversante basse ?

Avec, toujours la même définition de la mesure de la hauteur !

1°) hauteur du point B : $h/2 + (½ * ((2* \Phi) - 3) * h) = 34.52 + 8.14906 = 42.6697$ mm

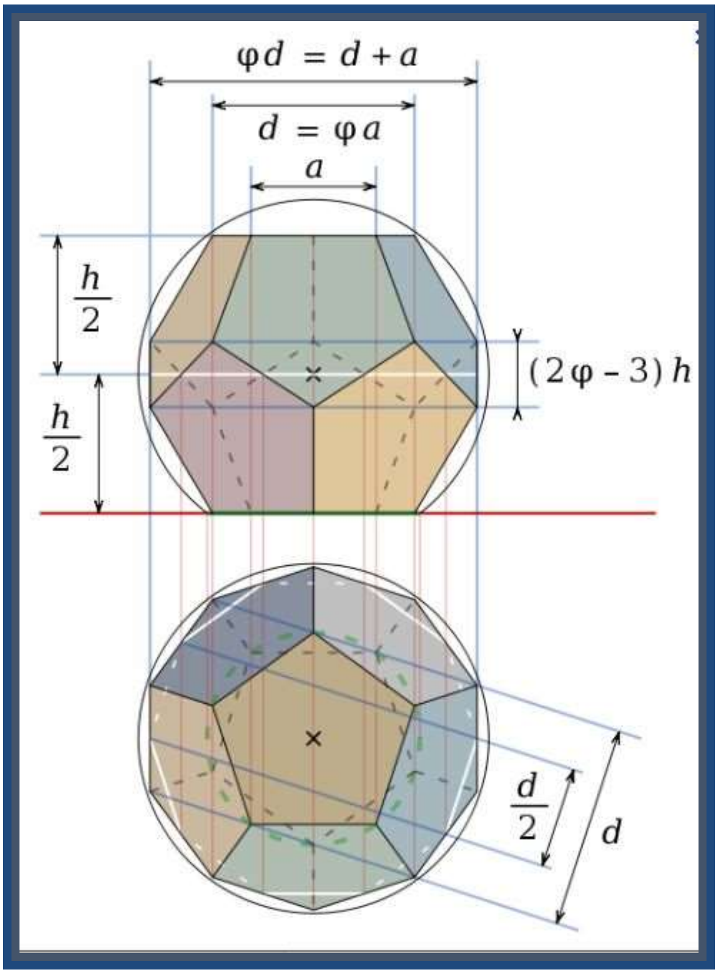
2°) longueur AV = $\Phi * a + [1/2 * a]$ Voir dessin ci-dessous

soit : 50.159 + 15.5 = 65.659

Ainsi 42.6697 / 65.659 = 0.6498576 dont l'ATN = 33°,02 qui est l'autre latitude cherchée.

On notera qu'à la latitude 52°625, sur les faces supérieures du dodécaèdre, l'heure sous-stylaire tombe rigoureusement sur les lignes horaires : 4, 8, 12, 12, 16, 20. Sur les faces inférieures, elle tombe rigoureusement sur les heures 4, 8, 16, 20, 24. (*)

A la latitude 33°,02 indiquée par la traversante basse, les superpositions des sous-stylaires avec les heures rondes sont moins rigoureuses.



Quelques dessins produits par Solarium ou AlgoSola montrent les 11 faces gnomonisées, à ces deux latitudes et avec les inclinaisons et déclinaisons précédemment établies.

****

(*) Ce recouvrement de la sous-stylaire par des heures rondes mériterait une explication générale, avec une démonstration bien conduite.

Le simple cube, ou hexaèdre, si on le pose sur une face, avec un sommet sol-sud et le sommet opposé ciel-nord, présente 4 faces latérales verticales dont les déclinaisons gnomoniques valent + et – 45° et + et – 135°. Sa traversante s'élève au dessus du sol d'un angle de ATN (1/1.4142136) = 35°, 26.
A cette latitude, les sous-stylaires sont recouvertes par les lignes d'heures :
4 et 20 pour les faces NE et NW
8 et 16 pour les faces SE et SW

L’octaèdre régulier, à la latitude 35°265, avec un sommet sol-sud, a des faces latérales dont les déclinaisons valent + et – 60° et + et – 120°, avec des inclinaisons de 109°28’ et 70°32’. Dans cette configuration leurs sous-stylaires sont couvertes par les heures 6 et 18.

Quant à l’octaèdre d’or, on a vu, avec celui du Ferraud, que ces recouvrements se produisent à la latitude 46°36’, alors que les déclinaisons des faces latérales valent + et – 54° et + et – 126°, et que les inclinaisons valent 121°87 et 58°12.

****